CEVAP ANAHTARI

Ad-Soyad:
Numara: 02.01.2018

1	2	3	4	Toplam

MAT 131 MATEMATİK I FİNAL SINAVI

1) i) a sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(a^3+a)x}{x} & ,x \neq 0 \\ a^2+1 & ,x=0 \end{cases}$

ile verilen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğuna göre a sayısını belirleyiniz.

$x \neq 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin(a^3+a)x}{x}$ olup $\sin(a^3+a)x$ ve x fonksiyonları tüm $\mathbb{R}$ de sürekli olduğundan (1) bölümü olan $f(x)$ fonk.'da $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ da süreklidir. $x=0$ noktası için inceleyelim. Sürekli olması için f, $x=0$ noktasında tanımlı olup $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (2) gerçeklenmelidir. Bu durumda

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(a^3+a)x}{x} \cdot \frac{a^3+a}{a^3+a} = a^3+a \quad (5)$$

$$f(0) = a^2+1$$

$\Rightarrow a^3+a = a^2+1$ (2) $\Rightarrow a^3-a^2+a-1=0$

$\Rightarrow a^2(a-1)+a-1=0$

$\Rightarrow (a^2+1)(a-1)=0$

$\Rightarrow a^2=-1$, $\underbrace{a=1}$ (3)

reel kök için $a=1$ olmalı

ii) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$ denkleminin $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ üzerinde en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ olsun. f fonksiyonu $\mathbb{R}$'de süreklidir. Dolayısıyla (3) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kapalı aralığında da süreklidir.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad (3)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^3\frac{\pi}{2} + \cos^3\frac{\pi}{2} = 1$$ (3)

olup $f(-\pi/2)$ ile $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ters işaretlidir. O halde Bolzano Teoremi'nden $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki en az bir x_0 noktası için $f(x_0)=0$'dır (3)

Bu durumda denklemin $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında en az bir kökü vardır.

2. i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ limitini hesaplayınız..

2

$\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$; 1^{∞} belirsizliği vardır. $y = (\sin x)^{\tan x}$ denilip her iki tarafın logaritması

alınırsa; $\ln y = \tan x \ln(\sin x)$ olup $\lim\limits_{x\to\pi/2} \ln y = \lim\limits_{x\to\pi/2} \tan x \ln(\sin x)$; $(0, \infty)$

3

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}} \; 3 \; \left(\frac{0}{0}\right) \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x}} \; 3 \; = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} = 0$$

elde edilir. Buradan 1

$\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1$ elde edilir.

ii) $y = \sin^5(\ln(\arctan x^3))$ olduğuna göre y' türevini belirleyiniz.

$$y = \sin^5(\ln(\arctan x^3))$$

$$\Rightarrow y' = 5\sin^4(\ln(\arctan x^3))\{\sin(\ln(\arctan x^3))\}' \quad 4$$

$$= 5\sin^4(\ln(\arctan x^3))\cos(\ln(\arctan x^3))\{\ln(\arctan x^3)\}' \quad 3$$

$$= 5\sin^4(\ln(\arctan x^3))\cos(\ln(\arctan x^3)) \cdot \frac{(\arctan x^3)'}{\arctan x^3} \quad 3$$

$$= 5\sin^4(\ln(\arctan x^3))\cos(\ln(\arctan x^3)) \cdot \frac{3x^2}{(1+x^6)} \cdot \frac{1}{\arctan x^3} \quad 3$$

II. yol: $f''(x) = 12x + 6\sqrt{2}$, $\quad f''(\sqrt{2}) = 18\sqrt{2} > 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ yerel minimum nokta

$f''(-2\sqrt{2}) = -18\sqrt{2} < 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{2}$ yerel maksimum nokta

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 24x$ fonksiyonu veriliyor.

i) f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyip yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını ve değerlerini belirleyiniz.

2

$f(x) = 2x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 24x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 6\sqrt{2}x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2 - 4(-4).1 = 18$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\sqrt{2} \mp \sqrt{18}}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -2\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}$

x		$-2\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		→		↗

f fonksiyonu $(-\infty, -2\sqrt{2})$ ve $(\sqrt{2}, \infty)$ aralıklarında artan, $(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ aralığında azalandır. $x = -2\sqrt{2}$ yerel maksimum nokta $f(-2\sqrt{2}) = 56\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2}$ yerel minimum nokta $f(\sqrt{2}) = -14\sqrt{2}$

ii) f fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyiniz. f fonksiyonu bir dönüm (büküm) noktasına sahip midir? Neden?

2

$f'(x) = 6x^2 + 6\sqrt{2}x - 24 \Rightarrow f''(x) = 12x + 6\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-6\sqrt{2}}{12} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x		$-\sqrt{2}/2$	
f''	−	0	+
f	konkav		konveks

4

$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ aralığında $f'' < 0$ olduğundan f fonksiyonu bu aralıkta konkav,

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ aralığında $f'' > 0$ olduğundan f fonksiyonu bu aralıkta konvekstir.

f fonksiyonu $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ noktasında konkavlıktan konveksliğe geçtiği için $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ noktası dönüm noktasıdır.

4) i) $y = x^2$ parabolune teğet olan ve $(0, -1)$ noktasından geçen doğruların denklemlerini yazınız.

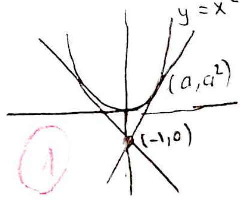
Teğetinin değme noktasının apsisi $x=a$ olsun. O halde $y=a^2$ olup (a,a^2) değme noktasıdır.

$y' = 2x \Rightarrow m_T = 2a$ bulunur. Bu durumda teğet denklemi;

$y - a^2 = 2a(x-a)$. $(0,-1)$ noktasından geçtiği için denklemi sağlamalı O halde

$-1 - a^2 = 2a(-a) \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \mp 1$ elde edilir. Böylece

$a=-1$ için $y = -2x-1$ ve $a=1$ için $y = 2x-1$ bulunur.



ii) $f(x) = x^4 + 1$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarını ve değerlerini belirleyiniz.

$f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

x	-1		0		3
f'		−	0	+	
f	2	↘	1	↗	82

$f(0) = 1$

$f(-1) = 2$

$f(3) = 82$

$x=0$ mutlak minimum nokta, $f(0) = 1$ mutlak minimum değer

$x=3$ mutlak maksimum nokta, $f(3) = 82$ mutlak maksimum değer

Süre: 80 dakia olup sorular eşit puanlıdır.
Başarılar
Doç. Dr. Mehmet ÜNVER